

Sprawdzian predyspozycji do klas matematycznych

XIV LO im. S. Staszica w Warszawie

(25 maja 2015 r.)

Uwagi

- Poniższe zadania można rozwiązywać w dowolnej kolejności.
 - Wszystkie zadania są jednakowo punktowane.
 - Podanie jedynie prawidłowej odpowiedzi liczbowej nie stanowi rozwiązania zadania. Ocenie podlegał będzie tok rozumowania oraz rachunki prowadzące do uzyskanego wyniku.
-

1. Wykaż, że jeżeli liczba a jest większa od 1, to

$$a + 2a^2 + 3a^3 < 6a^6.$$

2. Dany jest trójkąt ABC , w którym $\sphericalangle BAC = 90^\circ$. Punkty D , E , F leżą odpowiednio na bokach BC , CA , AB , przy czym $\sphericalangle EDF = 90^\circ$. Wykaż, że długość odcinka EF jest nie mniejsza od długości wysokości trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka A .

3. Ile liczb naturalnych z przedziału $\langle 1, 1000 \rangle$ można przedstawić w postaci sumy sześciu kolejnych liczb całkowitych (niekoniecznie dodatnich)? Odpowiedź uzasadnij.

4. Na przyjęciu spotkało się 19 osób. Okazało się, że każda z tych osób ma wśród pozostałych co najmniej 10 znajomych. Udowodnij, że na przyjęciu można wskazać taką trójkę osób, wśród których każde dwie się znają.

Uwaga: Przyjmujemy, że jeśli osoba A zna B , to osoba B zna A .

5. Wszystkie kąty wewnętrzne pięciokąta $ABCDE$ są równe. Symetralne odcinków AB i CD przecinają się w punkcie S . Wykaż, że proste ES i BC są prostopadłe.

6. Dane są dwa czworościany foremne $ABCE$ oraz $BCDF$ o wspólnej krawędzi BC , której długość wynosi 1. Punkty A , B , C , D leżą w jednej płaszczyźnie, a punkty E i F są różne i leżą po tej samej stronie płaszczyzny $ABCD$. Oblicz objętość czworościanu $BCEF$.