

Koło matematyczne.

zestaw 4/2015

1. Na bokach BC i AC trójkąta ABC obrano punkty A_1 i B_1 . Prosta l przechodzi przez punkty przecięcia okręgów o średnicach AA_1 i BB_1 . Udowodnić, że prosta l przechodzi przez punkt H przecięcia wysokości tego trójkąta. Kiedy prosta l przechodzi przez punkt C ?

2. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n równanie

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = y^2$$

ma rozwiązanie w liczbach całkowitych dodatnich.

3. Na bokach równoległoboku, na zewnątrz, zbudowano kwadraty. Udowodnij, że środki tych kwadratów są wierzchołkami kwadratu.
4. Udowodnij, że jeśli $n > 1$ jest liczbą całkowitą, to $n \nmid 2^n - 1$.
5. Udowodnij nierówność dla liczb dodatnich

$$\frac{2a+1}{b+c+1} + \frac{2b+1}{c+a+1} + \frac{2c+1}{a+b+1} \geq 3.$$

6. Okrąg wpisany w czworokąt $ABCD$ jest styczny do boków AB , BC , CD i DA odpowiednio w punktach K , L , M i N . Odcinki KM i LN przecinają się w punkcie S . Udowodnij, że

$$\frac{KS}{MS} = \frac{AK \cdot BK \cdot CD}{AB \cdot CM \cdot DM}.$$