

Koło matematyczne.

zestaw 3/2015/2016

1. Wykazaż, że jeżeli liczba $\underbrace{11\dots1}_n$ jest podzielna przez 7, to jest także podzielna przez 13.

2. Udowodnij, że jeżeli $ax^3 = by^3 = cz^3$ oraz $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ to

$$\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}.$$

3. Okręgi o_1 i o_2 są styczne zewnętrznie w punkcie A . Wspólna styczna zewnętrzna tych okręgów przecina prostą łączącą ich środki w punkcie B . Prosta przechodząca przez punkt B przecina okrąg o_1 w punktach C i D , a okrąg o_2 w punktach E i F . Udowodnij, że

$$\angle CAD = \angle EAF.$$

4. Dane są takie liczby całkowite a, b, c, d , że każda z tych liczb jest podzielna przez liczbę $ab - cd$. Wykaż, że $|ab - cd| = 1$.

5. Liczby rzeczywiste a, b, c spełniają zależności $|a| \geq |b + c|$, $|b| \geq |c + a|$, $|c| \geq |a + b|$. Udowodnij, że $a + b + c = 0$.

6. Dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n niech $a(n)$ i $b(n)$ oznaczają liczbę takich współczynników dwumianowych w n -tym wierszu Trójkąta Pascala, które przystają odpowiednio do 1 lub 2 modulo 3. Udowodnij, że $a(n) - b(n)$ jest potęgą dwójki.