

Koło matematyczne.

zestaw 15/2015

1. Rozwiązać równanie: $1 - |x + 1| = \frac{[x]-x}{|x-1|}$.
2. Niech a, b, c będą pierwiastkami równania $x^3 - x - 1 = 0$. Wyznacz $\frac{1+a}{1-a} + \frac{1+b}{1-b} + \frac{1+c}{1-c}$.
3. Dane są takie liczby całkowite a i b , że równanie

$$x^2 + ax + 1 - b = 0$$

ma dwa pierwiastki całkowite różne od zera. Wykaż, że liczba $a^2 + b^2$ jest złożona.

4. Na przyjęciu spotkało się 20 osób. Okazało się, że każdy z obecnych zna co najmniej 10 z nich. Wykaż, że spośród obecnych na przyjęciu osób można wyłonić cztery i posadzić przy okrągłym stole tak, aby każdy siedział obok swojego znajomego.
5. Niech a_n będzie ostatnią niezerową cyfrą w rozwinięciu dziesiętnym liczby $n!$. Czy ciąg (a_n) jest od pewnego miejsca okresowy?
6. Dany jest taki niepusty zbiór kół leżących w jednej płaszczyźnie, że ich wnętrza są parami rozłączne. Każde z tych kół jest styczne do dokładnie sześciu innych kół z tego zbioru. Wykaż, że kół jest nieskończenie wiele.