

**Koło matematyczne.**  
zestaw 12/2015/2016

1. Rozwiązać równanie

$$\sqrt{17 + 8x - 2x^2} + \sqrt{4 + 12x - 3x^2} = x^2 - 4x + 13.$$

2. Dla danych liczb rzeczywistych  $a$  i  $b$  definiujemy ciąg liczb  $x_n$  wzorami

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_n = \frac{x_{n-2}x_{n-1}}{2x_{n-2} - x_{n-1}} \quad \text{dla } n \geq 3.$$

Dla jakich liczb  $a$  i  $b$  nieskończenie wiele wyrazów ciągu  $x_n$  jest liczbami całkowitymi?

3. Liczby rzeczywiste  $a, b, c$  i  $d$  spełniają warunki  $a^2 + b^2 = 1, c^2 + d^2 = 1$ . Wykazać, że  $|ac + bd| \leq 1$ .

4. Liczby całkowite  $a, b, c, d$  spełniają warunek  $ad - bc = 1$ . Udowodnij, że ułamek

$$\frac{a^2 + b^2}{ac + bd}$$

jest nieskracalny.

5. Na przyjęciu spotkało się 100 osób. Wiadomo, że wśród każdych czterech osób znajduje się taka, która zna pozostałe trzy osoby z tej czwórki. Udowodnij, że istnieje co najmniej 97 osób, z których każda zna wszystkie osoby będące na przyjęciu.
6. Mając daną dodatnią liczbę całkowitą możemy dopisać na końcu cyfrę 0 lub 4; ponadto, jeśli dana liczba jest parzysta, wolno podzielić ją przez 2. Udowodnij, że startując od liczby 4 i wykonując opisane operacje, można uzyskać każdą liczbę całkowitą dodatnią.