

**Koło matematyczne.**

zestaw 11/2015/2016

1. Zbiór  $S$  składa się z 18 kolejnych liczb całkowitych. Udowodnij, że zbioru  $S$  nie da się rozbić na takie dwa rozłączne podzbiory, których iloczyn elementów są równe.
2. Rozstrzygnij, czy istnieje wielomian  $f(x)$  stopnia 100 o współczynnikach całkowitych o następującej własności: dla każdej liczby całkowitej  $n$  każde dwa wyrazy ciągu

$$f(n), f(f(n)), f(f(f(n))), \dots$$

są względnie pierwsze.

3. Dany jest czworościan foremny  $ABCD$  o krawędzi długości 1. Punkty  $M$  i  $N$  są odpowiednio środkami krawędzi  $BC$  i  $AD$ . Oblicz odległość między prostymi  $BN$  i  $DM$ .
4. Dana jest liczba  $A = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{1994}$ . Jakie cyfry znajdują się przed przecinkiem i po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby  $A$ ?
5. Udowodnić, że w dowolnym pięciokącie wypukłym suma kwadratów długości przekątnych jest mniejsza niż potrojona suma kwadratów długości jego boków.
6. Wyznacz wszystkie pary  $(x, y)$  liczby całkowitych dodatnich, dla których każda z liczb  $x + y$  oraz  $1 + xy$  jest potęgą liczby 2 o wykładniku całkowitym.