

Koło matematyczne.

29 września 2014

1. Udowodnić, że liczba postaci

$$2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1$$

ma przynajmniej n parami różnych dzielników będących liczbami pierwszymi.

2. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka liczba całkowita n , dla której liczba

$$n^2 + n - 1$$

jest podzielna przez 25.

3. Na przyprostokątnych AC i BC trójkąta prostokątnego ABC budujemy, po jego zewnętrznej stronie, trójkąty równoboczne ACE i BCF . Ponadto na przeciwprostokątnej AB budujemy trójkąt równoboczny ABD przy czym C i D leżą po tej samej stronie prostej AB . Wykazać, że pole trójkąta ABC jest równe polu czworokąta $ECFD$.
4. W trójkącie prostokątnym równoramiennym ABC ($AB = AC$) punkty D i E leżą odpowiednio na bokach AB i BC , przy czym $\angle CDE = 45^\circ$ oraz $DE = 2 \cdot AD$. Wyznacz miarę kąta ACD .
5. W trójkącie ABC dwusieczne AD , BE i CF przecinają się w punkcie I . Udowodnić nierówności

$$\frac{1}{4} < \frac{IA}{AD} \cdot \frac{IB}{BE} \cdot \frac{IC}{CF} \leq \frac{8}{27}.$$

6. Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele układów 23 kolejnych liczb naturalnych, których suma kwadratów jest kwadratem liczby naturalnej.