

Koło matematyczne.

13 października 2014

1. Dana jest liczba dziewięciocyfrowa, w której występuje każda cyfra różna od zera i cyfrą jedności jest 5. Udowodnij, że ta liczba nie jest kwadratem liczby naturalnej
2. Liczby a, b, c, d są dodatnie. Wyznacz wszystkie możliwe wartości sumy

$$S = \frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+c+d}.$$

3. Wyznacz wzór ogólny ciągu (a_n) jeśli

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 7, \quad a_{n+1} = 7a_n - 12a_{n-1}.$$

4. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC , którego najdłuższy bok ma długość d . Proste AP, BP, CP przecinają odpowiednio boki BC, CA, AB w punktach D, E, F . Wykaż, że

$$PD + PE + PF < d.$$

5. Udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej n największy wspólny dzielnik liczb $n^2 + 1$ oraz $(n + 1)^2 + 1$ jest równy 1 lub 5.
6. Wyznacz wszystkie wyrazy ciągu

$$a_n = n^2 + 44n + 99,$$

które są kwadratami liczb całkowitych.