

Koło matematyczne.

6 października 2014

1. Znajdź wszystkie liczby pierwsze postaci

$$n^n + 1,$$

które są mniejsze niż 10^{19} .

2. Ciąg (a_n) określony jest następującymi warunkami:

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_n = \frac{a_{n-1}^2 + 2}{a_{n-2}}.$$

Udowodnij, że wszystkie wyrazy tego ciągu są liczbami naturalnymi.

3. Cięciwa AB okręgu o promieniu 1 przecina pewną średnicę tego okręgu w punkcie C i jest nachylona do niej pod kątem 45° . Oblicz $AC^2 + BC^2$.
4. Udowodnić, że jeśli x , y i z są takimi liczbami nieujemnymi, że $x + y + z = 1$, to

$$\frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1} \leq \frac{3}{4}.$$

5. Dany jest trójkąt o bokach długości a, b, c i polu S . Udowodnij nierówność

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S.$$

6. Wysokości trójkąta ostrokątnego ABC , wpisanego w okrąg o środku O , przecinają się w punkcie H . Wykaż, że istnieją punkty D, E, F , leżące odpowiednio na bokach BC, CA, AB , takie, że

$$OD + DH = OE + EH = OF + FH,$$

a proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.