Kółko matematyczne dla kandydatów

Zestaw 3

1. Na okręgu o promieniu 1 opisano trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku C. Na przeciwprostokątnej AB tego trójkąta wybrano takie punkty D i E, że zachodzą równości $AD = AC$ i $BE = BC$. Oblicz długość odcinka DE.

2. W pudełku znajduje sie 11 kul białych i 11 kul niebieskich. Jaś i Małgosia grają w następującą grę, którą rozpoczyna Małgosia. Wyjmuje ona z tego pudełka wybrane przez siebie dwie kule. Jeżeli wybierze kule jednakowego koloru, to do pudełka dokłada jedną kulę białą; jeżeli wybierze kule róznych kolorów, to dokłada kulę niebieską. Następnie swój ruch, według tych samych zasad, wykonuje Jaś i znów Małgosia, znów Jaś itd., aż w końcu w pudełku zostanie tylko jedna kula. Jeżeli ta kula będzie biała, wygrywa Małgosia. W przeciwnym wypadku wygrywa Jaś. Czy Małgosia może tak prowadzić tę grę, aby wygrać? Odpowiedź uzasadnij.

3. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} a^2 + 24 = 9b + \frac{a+c}{2} \\ b^2 + 25 = 9c + \frac{b+a}{2} \\ c^2 + 26 = 9a + \frac{c+b}{2} \end{cases} .$$

4. Dany jest sześcian $ABCDEFGH$. Na krawędziach AE, BC i GH tego sześcianu wybrano odpowiednio takie punkty M, N i P, że $AM = CN = HP$. Wykaż, że trójkąt MNP jest równoboczny.

5. Powiemy, że liczba całkowita n jest liczbą słoneczną, jeżeli $n = a^2 + 5b^2$, gdzie liczby a i b są liczbami całkowitymi różnymi od zera. Wykaż, że jeżeli liczba n jest liczbą słoneczną, to n^4 też jest liczbą słoneczną.

6. Dana jest taka liczba rzeczywista, której rozwinięcie dziesiętne jest nieskończone i składa się wyłącznie z cyfr 1, 2 i 3. Wykaż, że jeżeli w tym rozwinięciu jest co najwyżej 2010 jedynek i co najwyżej 2010 dwójek, to dana liczba jest wymierna.

7. Na okręgu napisano n liczb rzeczywistych w taki sposób, że każda z tych liczb jest równa wartości bezwzględnej różnicy dwóch liczb stojących bezpośrednio za nią (patrząc zgodnie z ruchem zegara).
   (a) Znajdź te liczby, jeśli $n = 2010$ a ich suma jest równa 1340
   (b) Znajdź sumę tych liczb, jeśli $n = 1000$