

Kółko matematyczne dla kandydatów

Zestaw 2

1. W wierszu zapisano kolejno 2010 liczb. Pierwsza zapisana liczba jest równa 7 oraz suma każdych kolejnych siedmiu liczb jest równa 77. Ile może być równa ostatnia z zapisanych liczb?
2. W trójkąt ostrokątny  $ABC$  o polu  $S$  wpisano kwadrat  $KLMN$  o polu  $P$  w taki sposób, że punkty  $K$  i  $L$  leżą na boku  $AB$ , a punkty  $M$  i  $N$  leżą odpowiednio na bokach  $BC$  i  $CA$ . Oblicz sumę długości boku  $AB$  i wysokości trójkąta  $ABC$  poprowadzonej z wierzchołka  $C$ .
3. Rozstrzygnij, czy istnieją takie liczby rzeczywiste  $x, y, z$ , że

$$x + y + z = xy + yz + zx = 2.$$

4. Wyznacz liczbę par  $(x, y)$  liczb całkowitych spełniających równanie

$$x^4 = y^4 + 1223334444.$$

5. Rozstrzygnij, czy istnieją parami różne liczby pierwsze  $p, q, r$ , dla których liczba

$$\frac{(p+q)(q+r)(r+p)}{pqr}$$

jest liczbą całkowitą.

6. Znajdź wszystkie liczby całkowite dodatnie  $n$ , dla których liczba

$$\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)+1}$$

jest liczbą całkowitą.

7. Czy istnieje wielościan wypukły, w którym każda ściana ma inną liczbę wierzchołków?