

Koło matematyczne dla kandydatów do liceum zestaw 1.

W poniższych zadaniach $|ABC|$ oznacza pole trójkąta ABC (i analogicznie dla innych wielokątów).

1. Punkt P należy do boku AB trójkąta ABC . Udowodnić, że

$$\frac{|APC|}{|BPC|} = \frac{AP}{BP}.$$

2. Udowodnić, że dowolny trójkąt jest podzielony swoimi środkowymi na sześć trójkątów o równych polach.
3. Punkty P i Q są odpowiednio środkami AD i BC równoległoboku $ABCD$. Pole czworokąta ograniczonego prostymi AQ, DQ, BP, CP jest równe 1. Obliczyć pole równoległoboku $ABCD$.
4. Wielokąt wypukły o obwodzie $2p$ jest opisany na okręgu o promieniu r . Obliczyć pole tego wielokąta.
5. Przekątne czworokąta wypukłego $ABCD$ przecinają się w punkcie P . Udowodnić, że $|APD| = |BPC|$ wtedy i tylko wtedy, gdy $AB \parallel CD$.
6. Dany jest równoległobok $ABCD$. Punkt E należy do boku AB , a punkt F do boku AD . Prosta EF przecina prostą CB w punkcie P , a prostą CD w punkcie Q . Udowodnić, że $|CEF| = |APQ|$.
7. Każda przekątna pięciokąta wypukłego odcina trójkąt o polu równym 1. Obliczyć pole tego pięciokąta.