1. W wierszu zapisano kolejno 2010 liczb. Pierwsza zapisana liczba jest równa 7 oraz suma każdych kolejnych siedmiu liczb jest równa 77. Ile może być równa ostatnia z zapisanych liczb?

Wskazówka

Ponumeruj wypisane liczby a_1, a_2, ..., a_{2010}, a następnie znajdź zależność pomiędzy liczbami a_k i a_{k+7}.

2. W trójkąt ostrokątny ABC o polu S wpisano kwadrat $KLMN$ o polu P w taki sposób, że punkty K i L leżą na boku AB, a punkty M i N leżą odpowiednio na bokach BC i CA. Oblicz sumę długości boku AB i wysokości trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka C.

Wskazówka

Skorzystaj z podobieństwa trójkątów ABC i NMC.

3. Rozstrzygnij, czy istnieją takie liczby rzeczywiste x, y, z, że

$$x+y+z=xy+yz+zx=2.$$

Wskazówka

Oblicz $(x+y+z)^2$.

4. Wyznacz liczbę par (x,y) liczb całkowitych spełniających równanie

$$x^4=y^4+1223334444.$$

Wskazówka

Zbadaj, jaką liczbą — ze względu na przystość liczb x i y — może być liczba x^4-y^4.

5. Rozstrzygnij, czy istnieją parami różne liczby pierwsze p, q, r, dla których liczba

$$\frac{(p+q)(q+r)(r+p)}{pqr}$$

jest liczbą całkowitą.

Wskazówka

Skorzystaj z tego, że jeżeli istnieją liczby spełniające warunki zadania, to najmniejsza z nich dzieli sumę dwóch pozostałych.

6. Znajdź wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których liczba

$$\sqrt{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)+1}$$

jest liczbą całkowitą.

Wskazówka

Można sprawdzić kilka przykładów:

dla $n=1$ mamy $\sqrt{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4+1}=\sqrt{25}=5$,

dla $n=2$ mamy $\sqrt{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5+1}=\sqrt{121}=11$,

dla $n=3$ mamy $\sqrt{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6+1}=\sqrt{361}=19$,

dla $n=4$ mamy $\sqrt{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7+1}=\sqrt{841}=29$.

We wszystkich czterech przypadkach uzyskaliśmy liczby naturalne. Pytanie, czy tak będzie zawsze? Można postawić taką hipotezę i spróbować ją zweryfikować.

Warto poszukać zależności między liczbami: n i $\sqrt{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)+1}$.

Na podstawie czterech przykładów możemy przygotować tabelkę:

1	2	3	4	...	n
5	11	19	29	...	?

i spróbować odkryć ogólną zależność.

7. Czy istnieje wielościan wypukły, w którym każda ściana ma inną liczbę wierzchołków? Odpowiedź uzasadnij.

Wskazówka

Można rozpocząć od analizy ściany o największej liczbie wierzchołków.