

Koło matematyczne.

zestaw 1/2016/2017

1. Niech x, y, z będą liczbami dodatnimi. Udowodnij nierówność

$$\frac{x}{x + \sqrt{(x+y)(x+z)}} + \frac{y}{y + \sqrt{(y+z)(y+x)}} + \frac{z}{z + \sqrt{(z+x)(z+y)}} \leq 1.$$

2. Dla dowolnej liczby naturalnej n , niech $\tau(n)$ oznacza liczbę wszystkich dodatnich dzielników liczby n , zaś $\phi(n)$ liczbę dodatnich liczb całkowitych mniejszych od n i względnie pierwszych z n . Wyznacz wszystkie liczby naturalne n , dla których $\tau(n) + \phi(n) = n$.

3. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich zachodzi nierówność

$$\sqrt{2a} + \sqrt{2b} + \sqrt{2c} \leq \sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a}.$$

4. Rozstrzygnij, czy istnieje takich 100 różnych liczb całkowitych dodatnich, z których każda jest dzielnikiem sumy pozostałych 99 liczb.
5. Punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC . Promień okręgu opisanego na trójkącie ABC wynosi R . Wykaż, że pole trójkąta DEF jest równe

$$\frac{1}{4R}(BD \cdot CE \cdot AF + DC \cdot EA \cdot FB).$$

6. Ile jest wielomianów W spełniających dla każdej liczby rzeczywistej x warunek $W(W(x)) = x$?