

Koło matematyczne.
zestaw 16/2016/2017

1. Rozstrzygnij, czy istnieją liczby naturalne m, n spełniające równanie

$$m^2 + (m + 1)^2 = n^4 + (n + 1)^4.$$

2. Liczby dodatnie a, b, c należą do przedziału $(0; 1)$. Wykaż, że co najmniej jedna z liczb $a(1 - b), b(1 - c), c(1 - a)$ nie przekracza $1/4$.
3. Dany jest trapez $ABCD$ o polu 1, w którym stosunek długości podstaw AB i CD wynosi 2. Punkt K jest środkiem przekątnej AC , a punkt L jest punktem przecięcia prostych BK i AD . Wyznacz pole czworokąta $KCDL$.
4. Dany jest graniastosłup o podstawie n -kąta. Rozstrzygnij, dla jakich liczb n można wierzchołki tego graniastosłupa pokolorować trzema kolorami, tak aby każdy wierzchołek był połączony krawędziami z trzema wierzchołkami o różnych kolorach.
5. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n , dla których suma $1 + 2 + \dots + n$ jest dzielnikiem iloczynu $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$.
6. Dany jest n -elementowy zbiór X ($n \geq 4$) oraz $2^{n-2} + 1$ jego różnych podzbiorów. Wykaż, że wśród tych podzbiorów istnieją takie cztery, których część wspólna jest zbiorem pustym lub jednoelementowym.