

**Koło matematyczne.**

zestaw 13/2016/2017

1. Okręgi  $o_1$  i  $o_2$  są styczne zewnętrznie w punkcie  $D$ . Prosta styczna do okręgu  $o_1$  w punkcie  $A$  przecina okrąg  $o_2$  w punktach  $B$  i  $C$ . Udowodnij, że punkt  $A$  jest równoodległy od prostych  $BD$  i  $CD$ .
2. Wyznacz wszystkie liczby dwucyfrowe  $a$  takie, że liczba  $a^2$  ma cyfrę jedności i dziesiątek taką samą jaką liczba  $a$ . (przykładem takiej liczby jest 25).
3. Rozstrzygnij, czy istnieje 19-cyfrowa liczba naturalna  $N$  podzielna przez 11 o tej własności, że każda inna 19-cyfrowa liczba otrzymana z  $N$  przez zmianę kolejności jej cyfr nie jest podzielna przez 11.
4. Dany jest czworokąt wypukły  $ABCD$ , w którym  $AB = BC$ ,  $AD = DC$  oraz  $\angle ABC = 3\angle ACD$ . Dwusieczna kąta  $CAD$  przecina bok  $CD$  w punkcie  $E$ . Odcinki  $AC$  i  $BE$  przecinają się w punkcie  $F$ . Wykaż, że trójkąt  $CEF$  jest równoramienny.
5. Wyznacz najmniejszą liczbę naturalną, której nie da się przedstawić w postaci

$$\frac{2^a - 2^b}{2^c - 2^d},$$

gdzie  $a, b, c, d$  są liczbami całkowitymi dodatnimi.

6. W pewnym czworościanie wszystkie sfery dopisane są styczne do ścian czworościanu w środkach okręgów wpisanych w te ściany. Udowodnij, że czworościan jest foremny.