

Koło matematyczne.

zestaw 11/2016/2017

1. Liczby naturalne a, b, c, d spełniają warunek $ab = cd$ udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $a^n + b^n + c^n + d^n$ jest złożona.
2. Dwa okręgi są styczne wewnętrznie w A . AB jest średnicą większego okręgu. Cięciwa BK większego okręgu jest styczna do mniejszego w C . Wykaż, że AC jest dwusieczną kąta BAK .
3. Do pokrycia pewnego prostokąta zużyto k kwadratów 2×2 oraz m prostokątów o wymiarach 1×4 . Żadne dwie pokrywające figury nie nakładają się ani nie wystają na zewnątrz prostokąta. Udowodnij, że tego samego prostokąta nie da się pokryć, używając $k - 1$ kwadratów wymiaru 2×2 oraz $m + 1$ prostokątów o wymiarach 1×4 .
4. Punkty K, L, M, N są odpowiednio środkami boków AB, BC, CD, DA czworokąta wypukłego $ABCD$. Odcinki KM i NL przecinają się w punkcie S . Wykaż, że suma pól czworokątów $AKSN$ i $SLCM$ jest równa sumie pól czworokątów $KBLS$ i $NSMD$.
5. Dana jest taka liczba naturalna $n \geq 4$, dla której liczba $n + 1$ jest podzielna przez $\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1$. Udowodnij, że liczba $(n - 1)(n - 3)$ jest podzielna przez $\lfloor \sqrt{n} \rfloor - 1$.
6. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o środku O ; odcinek AB jest średnicą tego okręgu. Proste AB i CD przecinają się w punkcie P . Okręgi opisane na trójkątach OBC i ODA przecinają się w punktach O i Q . Udowodnij, że $OQ \perp PQ$.