



- 2\*. Dany jest trójkąt  $ABC$  o bokach:  $|AB| = 13, |BC| = 12, |AC| = 5$ .  $D$  - spodek wysokości z  $C$ , niech  $E$  będzie punktem przecięcia kwadratu  $ABFG$  (zawierającego w sobie punkt  $C$ ) z półprostą  $DC$ .

Jaki jest stosunek  $\frac{[ACEG]}{[CBFE]}$ ?

- $\frac{25}{144}$   
  $\frac{5}{12}$   
  $\frac{12}{5}$

- 3\*. Martyna i Oliwia grają w grę. Zaczyna Martyna, na początku mając na tablicy liczbę 2. Dziewczyny wykonują ruchy na przemian, w każdym ruchu muszą dodać jakiś dzielnik właściwy aktualnej liczby do zapisanej liczby. Wygrywa ta z dziewczyn, która napisze liczbę większą lub równą  $x$ .

Dzielniki właściwe liczby 10 to: 1, 2, 5.

Czy Martyna ma strategię wygrywającą dla  $x$  równego:

- 4?  
 9?  
 1237?

4. Czy
- $\text{nwd}(8649, 8789) > 100$
  - $\text{nwd}(8917, 7471) > 100$
  - $\text{nwd}(7164, 8358) > 100$
5. Ile cyfr ma najmniejsza liczba, która kończy się na 6 i jeśli się jej ostatnią cyfrę (6) przeniesie na początek, to otrzymana liczba jest 4 razy większa od liczby początkowej?
- 6
  - 8
  - 10
6. Liczba 139:
- Jest pierwsza.
  - Może być przedstawiona jako suma dwóch kwadratów liczb całkowitych.
  - Może być przedstawiona jako suma dwóch sześciątów liczb całkowitych.
7. Dany jest trójkąt równoboczny o boku 1 i prostokątny o przyprostokątnej 1.
- trójkąt równoboczny ma większy promień okręgu wpisanego.
  - trójkąt równoboczny ma większy promień okręgu opisanego
  - istnieje dokładnie jeden wielościan, którego wszystkie ściany to trójkąty równoboczne.
8. Na boku  $BC$  trójkąta  $ABC$ , spełniającego kąt  $ACB = 170^\circ$ , obrano taki punkt  $D$ , że  $BD = AC$ . Niech  $P$  i  $M$  będą odpowiednio środkami odcinków  $CD$  i  $AB$ . Miara kąta  $BPM$  wynosi:
- $85^\circ$
  - $90^\circ$
  - $95^\circ$
9. Mamy dany ciąg liczb naturalnych od 1 do 16.
- Możemy podzielić te liczby w pary, tak aby suma każdej z nich była kwadratem liczby całkowitej.
  - Możemy ustawić je w szeregu, tak aby suma każdych dwóch kolejnych była kwadratem liczby całkowitej.
  - Możemy ustawić je w kole, tak aby suma każdych dwóch kolejnych była kwadratem liczby całkowitej.

10\*. Oceń prawdziwość podanych relacji:

$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{99} + \frac{1}{143} = \frac{7}{13}$ .

Dla dowolnego  $n$ :  $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} < 1000$ .

Dla dowolnego  $n$ :  $\sum_{i=1}^n \frac{i}{1+i^2+i^4} < \frac{1}{2}$

11. Dane są takie liczby całkowite dodatnie  $a, b, x$ , że:

$$x \mid a + 5b$$

$$x \mid 3a + b$$

Czy z tych warunków wynika, że:

$x \mid 29a^2 + 38ab + 53b^2$

$x \mid 7a^2 + 21b^2$

$x \mid -8a^2 + 4ab + 22b^2$

**12\***. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na pewien z  $k$  różnych kolorów (każdy kolor został użyty). Prawdą jest, że;

- jeśli  $k = 3$  to zawsze istnieją dwa punkty tego samego koloru odległe o 1.
- jeśli  $k = 4$  to zawsze istnieją dwa punkty tego samego koloru odległe o 1 lub  $\sqrt{3}$ .
- jeśli  $k = 4$  to istnieje takie kolorowanie, że każda prosta jest jednokolorową lub dwukolorową.

**13.** Dany jest turniej - każdy zawodnik rozgrywa dokładnie jeden mecz z każdym innym i nie ma remisów. Mistrzem turnieju nazwiemy zawodnika, który dla każdego zawodnika  $A$ , wygrał z nim lub kimś kto wygrał z  $A$ . Czy:

- w turnieju może być dokładnie 2 mistrzów.
- w turnieju może być dokładnie 3 mistrzów.
- w czteroosobowym turnieju może zdarzyć się, że każdy jest mistrzem.

**14.** Niech  $d_1, d_2, \dots, d_m$  oznaczać wszystkie dodatnie dzielniki  $n$  oraz niech  $\sigma(n) = d_1 + d_2 + \dots + d_m$ . Czy:

- $\frac{\sigma(n)}{(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \dots + \frac{1}{d_m})} = n$
- $\sigma(2^k \cdot n) = (2^{k+1} - 1) \cdot \sigma(n)$
- istnieją dokładnie 2 takie liczby parzyste  $n$ , że  $\sigma(n) = 2n$  oraz  $n < 1000$

15\*. Na pewnej wyspie żyją dwa typy mieszkańców: prawdomówni - którzy zawsze mówią prawdę i kłamcy, którzy zawsze kłamią. Po przybyciu na wyspę podróżnik spotkał dwóch mieszkańców: wysokiego i niskiego. Zapytał wysokiego, czy obaj są prawdomówni, ale z jego wypowiedzi nie można było wywnioskować, kim oni byli. Wówczas zapytał niskiego, czy wysoki jest prawdomówny, a gdy ten odpowiedział, podróżnik wiedział, do jakiego typu należał każdy z nich. Czy napotkani mieszkańcy mogli być:

- obaj prawdomówni
- obaj kłamcami
- niski prawdomówny, zaś wysoki kłamcą

16. W tym zadaniu  $d$  oznacza długość średnicy podstawy stożka, zaś  $l$  - długość jego tworzącej. Czy można zbudować stożek, gdy:

- $d = 6, l = 5$
- $d = 12, l = 5$
- $d = 22, l = 12$

17\*. Niech  $A = (0, 0)$ ,  $B = (1, 0)$ ,  $C = (2, 0)$ ,  $D = (3, 0)$ ,  $E = (0, 1)$ . Czy

- $\angle BED = \angle ECA?$
- $\angle BEC = \angle EDA?$
- $\angle AEB = \angle EBA?$

18. Czy liczba  $3^{105} + 4^{105}$  jest podzielna przez:
- 5?
  - 11?
  - 13?
19. Pewien pijak spacerując po nadmorskich klifach znalazł się trzy kroki od przepaści (trzeci już wpada w przepaść). Jest on pijany, dlatego wykonuje losowe ruchy przybliżając się o krok do przepaści z prawdopodobieństwem  $\frac{2}{5}$  oraz oddalając się o krok od przepaści z prawdopodobieństwem  $\frac{3}{5}$ . Zakładamy, że pijak może odejść od przepaści dowolnie daleko oraz nie kończy spaceru za wyjątkiem upadku w przepaść.
- Prawdopodobieństwo pozostania żywym po pięciu krokach wynosi więcej niż 0.9.
  - Pijak może spaść w 24 kroku.
  - Po nieskończeniu długim czasie szansa na przeżycie pijaka wynosi  $\frac{4}{5}$ .
20. Codziennie zaraz po wyjściu ze szkoły Jaś idzie na stację metra i wsiada w pierwszy pociąg, który nadjedzie, niezależnie od kierunku jazdy. Na Kabatach mieszka babcia Jasia, a niedaleko Młocin jego dziewczyna. Jaś zawsze korzysta z okazji i odwiedza osobę, w pobliżu której się znalazł. Zakładamy, że pociągi metra kursują w stałych odstępach czasu, z równą częstotliwością w każdym z dwóch kierunków.
- Jaś zawsze z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{2}$  pojedzie do babci.
  - Czy może się zdarzyć, że Jaś bez celowego działania będzie jeździł do dziewczyny 5 razy częściej, niż do babci?
  - Czy możliwe jest, że gdyby Jaś zmienił strategię i przepuszczał zawsze pierwszy napotkany pociąg metra i wsiadał do drugiego to zmieniłby częstotliwość widzenia babci?
21. Dane są dwie liczby niewymierne.  
Czy możliwe jest, aby:
- Ich suma była liczbą wymierną
  - Zarówno ich iloczyn, jak i iloraz były wymierne
  - Występowało między nimi nieskończenie wiele liczb wymiernych
22. Które z poniższych planszy można pokryć klockami  $6 \times 1$ ?
- $16 \times 15$
  - $19 \times 19$  bez środkowego pola
  - $13 \times 13$  bez środkowego pola

23. Zdanie "Dla dowolnych  $n$  kolejnych liczb naturalnych, można wybrać dwie z nich (niekoniecznie różne), tak że ich iloczyn daje resztę 1 w dzieleniu przez  $m$ " jest prawdziwe dla:

$m = 8, n = 2$

$m = 13, n = 5$

$m = 17, n = 8$

24. Dane są:  $f(x) = x^2 + ax + b$ ,  $g(x) = x^2 + cx + d$ , takie, że:  $a \neq c$ ,  $b \neq d$ ,  
Spełniony jest warunek:  $f(17) + f(105) = g(17) + g(105)$ .  
Ile rozwiązań ma równanie  $f(x) = g(x)$ ?

0

1

2

25. W kwadracie  $ABCD$  wybrano 2 losowe punkty na boku  $CD$ :  $M, N$ . Trójkąty  $ABM, ABN$  na pewno:

są podobne.

mają równe obwody.

mają równe pola.

26. Mając pierścień z dwóch okręgów o wspólnym środku, cięciwa większego okręgu styczna do mniejszego ma długość  $k$ . Pole między okręgami wyraża się przez:

$\pi k^2$

$\frac{\pi k^2}{4}$

$\frac{\pi k}{4}$



27\*. Liczba  $\sqrt{12 + 2\sqrt{27}} - \sqrt{19 - 4\sqrt{12}}$  jest:

- ujemna.
- całkowita.
- niewymierna.

28. Liczba  $a^3b^5c^2$  jest siódmą potęgą pewnej liczby całkowitej, gdzie  $a, b$  i  $c$  są liczbami całkowitymi. Czy z tego wynika, że siódmą potęgą jest również liczba:

- $ab^4c^3$ ?
- $a^2bc$ ?
- $a^{22}b^{333}c^{55555}$ ?

29. Mamy daną liczbę naturalną  $k$ . Ile uporządkowanych rozwiązań  $(m, n)$  może mieć równanie  $2^m + 2^n = k$ , gdzie  $m$  i  $n$  są liczbami całkowitymi.

- 0
- 1
- 2

30. Czy istnieje 100 kolejnych liczb naturalnych wśród których:

- Dokładnie 12 jest liczbami Fibbonacciego?
- Dokładnie 7 jest liczbami pierwszymi?
- Dokładnie 7 jest potęgami dwójki o całkowitym wykładniku?