XXI Konkurs Matematyczny St@ś

XIV LO im. Stanisława Staszica

Finał

5 czerwca 2023 roku

Treść każdego z poniższych zadań zawiera trzy stwierdzenia. Każde z nich jest prawdziwe lub fałszywe (przy czym może się zdarzyć, że wszystkie trzy stwierdzenia w obrębie jednego zadania są fałszywe lub wszystkie trzy są prawdziwe). Jeśli dane stwierdzenie jest prawdziwe, zakoloruj kwadrat przy literce T na karcie odpowiedzi, jeśli zaś stwierdzenie jest fałszywe, zakoloruj kwadrat przy literce N. W przypadku pomyłki błędne zaznaczenie otocz kółkiem i zamaluj odpowiedni kwadrat. Jeśli uznasz, że jeszcze raz się pomyliłeś, otocz kółkiem drugie zaznaczenie i obok zapisz poprawną odpowiedź: T lub N. Nie korzystaj z korektora.

Na rozwiązanie poniższych zadań masz 90 minut. Za udzielenie poprawnych odpowiedzi na wszystkie podpunkty otrzymujesz 2 punkty, za dwie poprawne odpowiedzi 1 punkt, w pozostałych przypadkach 0 punktów. Nie możesz używać kalkulatora. Powodzenia!

1. Kwadrat pewnej liczby rzeczywistej a jest równy 1. Wówczas

- **a)** $a = 1$;
- **b)** liczba a jest dodatnia;
- **c)** liczba a ma dokładnie dwa dzielniki całkowite.

2. Jeżeli $a^2 + b^2 = 0$, to

- **a)** co najmniej jedna z liczb a i b jest równa 0;
- **b)** obie liczby a i b są równe 0;
- **c)** $b = -a$.

3. Jeżeli $(a + b)^3 = a^3 + b^3$, to

- **a)** obie liczby a i b są równe 0;
- **b)** co najmniej jedna z liczb a i b musi być równa 0;
- **c)** $(a + b)^{2023} = a^{2023} + b^{2023}$.

4. Zapis $\overline{abcd}$ oznacza liczbę zapisaną w systemie dziesiętnym za pomocą cyfr a, b, c, d (a to cyfra tysięcy itd.) Wówczas

- **a)** liczba $\overline{abcd} - \overline{cadb}$ jest podzielna przez 9;
- **b)** liczba $\overline{abcd} - \overline{cadb}$ jest parzysta, tylko gdy b i d są parzyste;
- **c)** liczba $\overline{abcd} - \overline{bcad}$ jest podzielna przez 18.

5. Liczba $2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{2022} + 2^{2023}$ jest

a) podzielna przez 3; **b)** podzielna przez 5; **c)** podzielna przez 7.

6. Liczba n to najmniejsza liczba naturalna różna od 1, która przy dzieleniu przez 2, 3, 4, 5, 6, 7 daje tę samą resztę równą 1. Wobec tego

a) $n < 2023$; **b)** $n > 966$; **c)** $n = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 + 1$.

7. Na tablicy zapisano wszystkie liczby czterocyfrowe o różnych cyfrach ze zbioru 2, 3, 5, 7. Iloczyn tych liczb jest podzielny przez

a) 3; **b)** 2^6; **c)** 2^{12}.

8. Ile jest liczb czterocyfrowych, których iloczyn cyfr jest równy 3^5?

a) 2^4; **b)** 3^4; **c)** mniej niż 2^5.

9. Trójkąt równoboczny można podzielić na

a) 6 trójkątów równobocznych; **b)** 7 trójkątów równobocznych; **c)** 8 trójkątów równobocznych.

10. Ile istnieje trójkątów ABC takich, że $AB = 2023$, $BC = 1410$, długość AC jest liczbą naturalną?

a) nieskończenie wiele; **b)** 2818; **c)** 2819.

11. Liczba osi symetrii czworokąta może być równa dokładnie

a) 1; **b)** 2; **c)** 3.

12. Wielokąt, który ma 2023 boki może mieć

a) 2019 kątów wklęsłych; **b)** 2020 kątów wklęsłych; **c)** 2021 kątów wklęsłych.

Uwaga: kąt wklęsły to kąt o mierze większej od $180°$.

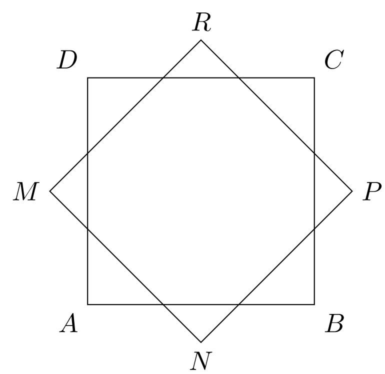
13. Suma długości wszystkich wysokości trójkąta może być

a) większa od obwodu tego trójkąta;

b) większa od $3/4$ obwodu tego trójkąta;

c) mniejsza od $1/1000000$ obwodu tego trójkąta.

14. Kwadraty $ABCD$ i $MNPR$ są położone jak na rysunku poniżej. Punkty przecięcia kwadratów dzielą boki kwadratu $ABCD$ na trzy równe odcinki. Pole kwadratu $ABCD$ jest równe 36.



a) Pole części wspólnej obu kwadratów jest mniejsze od 29;

b) Stosunek pola mniejszego kwadratu do pola większego jest równy $8/9$;

c) Przekątna kwadratu $MNPR$ jest liczbą naturalną.

15. Niech n będzie pewną liczbą całkowitą większą od 1. Ułamki $\frac{1}{n}$ i $\frac{1}{n+1}$ mogą

a) mieć skończone rozwinięcia dziesiętne;

b) sumować się do ułamka o mianowniku mniejszym od $n(n+1)$;

c) różnić się o $\frac{1}{1610}$.