Koło matematyczne.
12 maja 2014

1. Znaleźć wszystkie wielomiany $P(x)$ spełniające równanie $P(x^2) = (P(x))^2$ dla wszystkich liczb rzeczywistych x.

2. Siedmiokąt foremny $ABCDEFG$ odbijamy symetrycznie względem prostej AG. Punkty B', C', D', E', F' są obrazami punktów B, C, D, E, F. Udowodnić, że trójkąty ABC i CGD' są podobne.

3. Na tablicy napisano n liczb całkowitych. Ruch polega na wybraniu dwóch równych liczb, zwiększeniu jednej z nich o 1 i zmniejszeniu drugiej z nich o 1. Udowodnić, że jest możliwa tylko skończona liczba ruchów.

4. Niech $p = (a_1, a_2, \ldots, a_{17})$ będzie dowolną permutacją liczb od 1 do 17. Niech k_p oznacza największy indeks k, dla którego prawdziwa jest nierówność $a_1 + \ldots + a_k < a_{k+1} + \ldots + a_{17}$. Obliczyć sumę liczb k_p po wszystkich permutacjach.

5. Rozstrzygnąć, czy istnieje nieskończenie wiele trójek liczb całkowitych dodatnich spełniających równanie
$$a^2 + b^2 + c^2 = 3abc.$$

6. Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do ściany ABC w punkcie O, zaś sfera dopisana jest styczna do ściany ABC w punkcie H. Udowodnić, że punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC wtedy i tylko wtedy, gdy punkt H jest ortocentrum tego trójkąta.