

Koło matematyczne.

28 kwietnia 2014

1. Udowodnić, że jeśli A, B, C, D są nieujemnymi kątami o sumie równej π , to
 - a) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + \cos^2 D \geq 2 \sin A \sin C + 2 \sin B \sin D$
 - b) $\sin A \sin C + \sin B \sin D \leq 1$
2. Udowodnić, że jeśli liczby całkowite x i y są względnie pierwsze, $xy > 1$ oraz n jest liczbą parzystą, to liczba $x^n + y^n$ nie dzieli się przez $x + y$.
3. Znaleźć wszystkie wielomiany $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ o następujących własnościach
 - a) wszystkie współczynniki a_0, a_1, \dots, a_{n-1} należą do zbioru $\{-1, 1\}$
 - b) wszystkie pierwiastki równania $P(x) = 0$ są rzeczywiste.
4. W czworoboku rozważamy dwusieczne trzech kątów płaskich mających wspólny wierzchołek. Wykazać, że jeśli pewne dwie z tych dwusiecznych są prostopadłe, to wszystkie one są wzajemnie prostopadłe.
5. W prostokącie $ABCD$ zachodzi $AB = 3 \cdot AD$. Punkt E leży wewnątrz prostokąta oraz $AE = \sqrt{2}$, $EB = 4\sqrt{2}$, $ED = 2$. Oblicz pole prostokąta $ABCD$.
6. Na tablicy napisano trójkę liczb a, b, c . Ruch polega na wbraniu jednej z nich i zastąpieniu jej sumą tej liczby i różnicy dwóch pozostałych liczb pomnożonej przez dowolną liczbę wymierną. Rozstrzygnąć, czy startując od trójki liczb $0, 1, \sqrt{2}$, przy pomocy takich operacji, można otrzymać trójkę (nieuporządkowaną) $0, \sqrt{2}, 2$.

Powodzenia!