Koło matematyczne.

24 marca 2014

1. W pewnym kraju jest skończona liczba miast, które połączono siecią dróg jednokierunkowych. Wiadomo, że każde dwa miasta łączy pewna droga jednokierunkowa. Wykazać, że istnieje miasto, z którego można odbyć podróż do każdego z pozostałych miast odwiedzając po drodze co najwyżej jedno inne miasto.

2. Niech ABC będzie trójkątem równobocznym, a E będzie zbiorem wszystkich punktów należących do odcinków AB, BC i AC. Każdy punkt ze zbioru E malujemy kolorem białym lub czarnym. Rozstrzygnąć, czy można to zrobić w taki sposób, by nie istniał trójkąt prostokątny o jednobarwnych wierzchołkach.

3. Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich zachodzi nierówność
$$\frac{a^2}{8a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2}{8b^2+(c+a)^2}+\frac{c^2}{8c^2+(a+b)^2}\leq\frac{1}{4}$$

4. Liczbę n można przedstawić w postaci sumy kwadratów trzech liczb całkowitych dodatnich. Dowieść, że liczbę n^2 można także przedstawić w postaci sumy kwadratów trzech liczb całkowitych dodatnich.

5. Rozstrzygnąć, czy istnieje takich 100 różnych liczb całkowitych dodatnich, z których każda jest dzielnikiem sumy pozostałych 99 liczb.

6. Rozwiązać układ równań
$$\begin{cases} 2^{x^2+y}+2^{y^2+x} &= 128 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y} &= 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

Powodzenia!