Koło matematyczne.
10 lutego 2014

1. Dwa okręgi o promieniach r_1 i r_2, przecinające się w punktach C i D, są styczne wewnętrznie w punktach A i B do okręgu o promieniu r. Udowodnić, że jeżeli punkty A, B i C leżą na jednej prostej, to

$$r_1 + r_2 = r.$$

2. Niech S będzie zbiorem wszystkich ciągów sześcioelementowych o wyrazach ze zbioru $\{0, 1, \ldots, 9\}$. Niech A będzie podzbiorem zbioru S o tej własności, że jeśli $x, y \in A$, to ciągi x i y różnią się na co najmniej dwóch miejscach (czyli np. ciągi 027592 i 020592 nie mogą znaleźć się jednocześnie w zbiorze A). Wyznaczyć największą możliwą liczbę elementów jaką może mieć zbiór A.

3. Udowodnić, że dla $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność

$$x^4 + y^4 + (x^2 + 1)(y^2 + 1) \geq x^3(1 + y) + y^3(1 + x) + x + y.$$

4. Dany jest wielomian f stopnia ≥ 4 o współczynnikach całkowitych. Załóżmy, że istnieją cztery różne liczby całkowite a, b, c, d, dla których $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 5$. Pokazać, że nie istnieje liczba całkowita k, dla której $f(k) = 8$.

5. Każda z liczb $a_1, a_2, \ldots a_n$ jest równa 1 lub -1. Wiadomo również, że

$$a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + \ldots + a_na_1a_2a_3 = 0.$$

   Udowodnij, że liczba n jest podzielna przez 4.

6. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka liczba całkowita dodatnia n, dla której liczba $7^n - 1$ jest podzielna przez $6^n - 1$.

Powodzenia!