Koło matematyczne.

3 lutego 2014

1. Parami różne liczby rzeczywiste ustawione są w prostokąt o m wierszach i n kolumnach. W każdym wierszu liczby czytane z lewa na prawo tworzą ciąg rosnący. Zmieniamy porządek liczb w poszczególnych kolumnach tak, aby liczby czytane z góry na dół tworzyły w każdej kolumnie ciąg rosnący. Dowieść, że po tej zmianie liczby we wszystkich wierszach nadal tworzą ciągi rosnące.

2. Niech $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, zaś $\mathbb{R}$ jest zbiorem liczb rzeczywistych. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ spełniające warunek
$$f(x+y) + f(x-y) = f(3x).$$

3. Liczby dodatnie a, b, c, d i e spełniają warunek $abcde = 1$. Udowodnić nierówność
$$\frac{a+abc}{1+ab+abcd} + \frac{b+bcd}{1+bc+bcde} + \frac{c+cda}{1+cd+cdea} + $$
$$+ \frac{d+dea}{1+de+deab} + \frac{e+eab}{1+ea+eabc} \geq \frac{10}{3}.$$

4. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania rzeczywiste równania
$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} = \sqrt[3]{x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3}.$$

5. Ω jest ustalonym okręgiem o środku O. Niech M będzie rzutem prostokątnym punktu O na ustaloną prostą l oraz niech P będzie zmieniającym się punktem na Ω. Niech Γ będzie okręgiem o średnicy PM przecinającym odpowiednio Ω i l po raz drugi w punktach X i Y. Udowodnić, że wszystkie proste XY mają punkt wspólny.

6. Wyznaczyć największą wartość x_0, dla której istnieje ciąg liczb rzeczywistych dodatnich $x_0, x_1, \ldots, x_{1995}$ spełniających dwa warunki:
$$x_0 = x_{1995} \quad \text{oraz} \quad x_{i-1} + \frac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \frac{1}{x_i}$$
dla $i = 1, 2, \ldots, 1995$.

Powodzenia!