Koło matematyczne.

27 stycznia 2014

1. W trójkącie ABC środkowe poprowadzone do boków AB i AC są prostopadłe. Udowodnij, że $\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C \geq \frac{2}{3}$.

2. Dzielimy przestrzeń trójwymiarową na trzy niepuste, parami rozłączne zbiory A_1, A_2, A_3. Udowodnić, że jeden z tych zbiorów ma następującą własność: dla dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej d istnieje w tym zbiorze para punktów, których odległość jest równa d.

3. Wyznaczyć wszystkie ciągi $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ dodatnich liczb rzeczywistych takie, że
$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 96 \quad \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 144 \quad \sum_{i=1}^{n} a_i^3 = 216.$$

4. W wypukłym czworokącie $ABCD$ punkt M jest środkiem boku AB oraz $\measuredangle CMD = 120^\circ$. Udowodnić, że
$$\frac{1}{2}AB + AD + BC \geq CD.$$

5. Na tablicy napisano 2014 liczb: $1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/2014$. Spośród nich wybieramy dowolne dwie, np. a i b. Następnie ścieramy je, a zamiast nich piszemy liczbę $a+b+ab$. Po 2013 krokach na tablicy zostanie tylko jedna liczba. Obliczyć jej wartość.

6. Niech a będzie liczbą dodatnią, $n \geq 2$ liczbą naturalną. Liczby $x_1, x_2, \ldots, x_n$ należą do przedziału $[0, a]$ i spełniają warunek
$$x_1 x_2 \ldots x_n = (a - x_1)^2 (a - x_2)^2 \ldots (a - x_n)^2.$$
Wyznaczyć maksymalną wartość iloczynu $x_1 x_2 \ldots x_n$.

Powodzenia!