

Sprawdzian predyspozycji do klas matematycznych
XIV LO im. S. Staszica w Warszawie
(2 czerwca 2014 r.)

1. Udowodnij, że jeżeli w trójkącie ABC symetralne boków BC i CA oraz dwusieczna kąta ACB przecinają się w jednym punkcie, to trójkąt ABC jest równoramienny.
2. Pewna liczba postaci $a^4 - b^4$, gdzie a i b są dodatnimi liczbami całkowitymi, jest iloczynem dwóch liczb pierwszych p i q , przy czym $p > q$. Wykaż, że liczba $p - q$ jest podwojonym kwadratem liczby naturalnej.
3. Na bokach BC i CA trójkąta ABC zbudowano, po jego zewnętrznej stronie, takie prostoty $BCDE$ oraz $CAGH$, że $CD = CA$ oraz $BC = CH$. Punkt M jest środkiem odcinka AB . Wykaż, że $CM = \frac{1}{2}DH$.
4. Oblicz, ile jest liczb naturalnych pięciocyfrowych parzystych, w zapisie których występuje dokładnie jedna cyfra zero i dokładnie jedna cyfra jeden.
5. Wyznacz wszystkie pary (a, b) dodatnich liczb całkowitych, dla których
$$2a + b + 3\sqrt{ab} = 3\sqrt{a} + 3\sqrt{b}.$$
6. Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny, którego podstawą jest trójkąt równoboczny o boku a . Odległość od wierzchołka podstawy do płaszczyzny zawierającej przeciwległą ścianę boczną ostrosłupa równa się b . Oblicz objętość ostrosłupa.

Uwaga. Podanie jedynie prawidłowej odpowiedzi liczbowej nie stanowi rozwiązania zadania. Ocenie podlegał będzie tok rozumowania oraz rachunki prowadzące do uzyskanego wyniku.