Koło matematyczne.
zestaw 9/2015

1. Rozwiązać równanie $x^3 + 3y^3 + 9z^3 = 9xyz$, gdzie x, y, z są liczbami wymiernymi.

2. Wykazać, że równanie

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2015}$$

ma w liczbach naturalnych skończoną liczbę rozwiązań.

3. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC. Proste AP, BP i CP przecinają odcinki BC, CA i AB odpowiednio w punktach D, E i F. Czy można punkt P wybrać w taki sposób, aby dokładnie trzy spośród trójkątów AEP, AFP, BFP, BDP, CDP, CEP miały równe pola?

4. Dany jest trójkąt równoboczny ABC o boku długości 1 i środku ciężkości w punkcie S. Prosta przechodząca przez punkt S przecina odcinki AC i BC odpowiednio w punktach D i E. Tworzymy taki trójkąt DEF, że $DF = DB$ i $EF = EA$. Oblicz długość wysokości trójkąta DEF opuszczonej z wierzchołka F.

5. Punkt O leży wewnątrz pięciokąta foremnego $ABCDE$. Wiadomo, że $\measuredangle BAO = 48^\circ$ a $\measuredangle CBO = 42^\circ$. Oblicz miarę kąta AOE.

6. Dane są parami różne liczby całkowite a, b, c oraz wielomian $P(x)$ o współczynnikach całkowitych. Udowodnij, że nie mogą zachodzić jednocześnie równości

$$P(a) = b, \quad P(b) = c, \quad P(c) = a.$$