Koło matematyczne.
zestaw 8/2015/2016

1. Dany jest ściśle rosnący ciąg liczb naturalnych taki, że $x_1 = 1$ i $x_{n+1} \leq 2n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Pokazać, że
$$\forall_{k \in \mathbb{N}} \exists_{r,s} \quad x_r - x_s = k.$$

2. Dane są wielościany $w_1, w_2, \ldots, w_n$. Każde dwa z nich mają punkty wspólne. Udowodnić, że istnieje płaszczyzna mająca punkty wspólne ze wszystkimi wielościanami $w_1, w_2, \ldots, w_n$ jednocześnie.

3. Dany jest zbiór n-elementowy A. Nich $A_1, A_2, \ldots, A_{2^n}$ oznaczają wszystkie podzbiory zbioru A. Udowodnić, że zbiory A_i można tak ustawić w ciąg, żeby każde dwa sąsiednie wyrazy różniły się dokładnie o jeden element.

4. Dane są takie liczby naturalne $m, n \geq 2$, że liczba $m^2 + n^2 - 1$ jest podzielna przez $m + n - 1$. Udowodnij, że liczba $m + n - 1$ jest złożona.

5. Punkt P leży na zewnątrz równoległoboku $ABCD$, przy czym $\measuredangle PAB = \measuredangle PCB$. Udowodnij, że $\measuredangle APB = \measuredangle CPD$.

6. Ciąg liczb rzeczywistych (a_n) jest określony wzorem rekurencyjnym:
$$a_1 = 1, \quad a_n = \frac{n+1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} a_i \quad \text{dla} \quad n \geq 2.$$
Wyznacz wzór ogólny tego ciągu.