Koło matematyczne.
zestaw 7/2015/2016

1. Niech $S(n)$ oznacza sumę cyfr zapisu dziesiętnego liczby naturalnej n. Określamy ciąg (x_n) następująco: $x_1 = 1$, $x_{n+1} = S(S(x_n) + x_n)$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Wyznaczyć x_{2004}.

2. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ nie będący trapezem. Udowodnić, że czworokąt ten można wpisać w okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy dwusieczne kątów utworzonych przez proste AB i CD oraz proste BC i AD są prostopadłe.

3. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość
$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k}^2 = \frac{n}{2}\binom{2n}{n}.$$

4. Na płaszczyźnie danych jest pięć punktów o tej własności, że pole każdego trójkąta o wierzchołkach w tych punktach nie przekracza 1. Wykaż, że punkty te leżą w pewnym trapezie o polu nieprzekraczającym 3.

5. Niech $n > 1$ będzie liczbą naturalną. Wykaż, że każda z liczb
$$n! + 1, n! + 2, \ldots, n! + n$$
ma dzielnik pierwszy, który nie jest dzielnikiem, żadnej z pozostałych liczb wypisanych powyżej.

6. Wysokości trójkąta ostrokątnego ABC przecinają się w punkcie H. Proste poprowadzone z punktu A są styczne do okręgu o średnicy BC w punktach P i Q. Udowodnij, że punkty P, Q, H są współliniowe.