Koło matematyczne.

zestaw 7/2015

1. Z wierzchołka C kąta prostego trójkąta ABC opuszczamy wysokość CK i w trójkącie ACK prowadzimy dwusieczną CE. Prosta przechodząca przez punkt B i równoległa do CE przecina prostą CK w punkcie F. Udowodnić, że prosta EF dzieli odcinek AC na połowy.

2. W trójkącie ABC punkty K i L są rzutami wierzchołków B i C na dwusieczną kąta A. Punkt M jest spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka A, Punkt N jest środkiem boku BC. Wykaż, że punkty K, L, M i N leżą na jednym okręgu.

3. Dana jest liczba całkowita dodatnia n taka, że $24|n+1$. Udowodnij, że suma wszystkich jej dzielników jest podzielna przez 24.

4. Danych jest dziesięć liczb naturalnych dwucyfrowych. Udowodnij, że spośród tych liczb można wyłonić dwa takie różne podzbiory, że sumy liczb w obu podzbiorach są równe.

5. Ciąg (a_n) jest określony następująco: $a_1 = 2$, a dla $n \geq 1$ liczba a_{n+1} jest największym dzielnikiem pierwszym liczby $a_1a_2 \ldots a_n + 1$. Udowodnij, że w tym ciągu nie występuje liczba 5.

6. Ciąg $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 44\}$ ma następującą własność: pomiędzy każdymi dwoma wyrazami o jednakowych wartościach znajduje się co najmniej jeden wyraz większy od nich. Wyznacz największą możliwą długość n takiego ciągu.