Koło matematyczne.

zestaw 6/2015

1. Udowodnić, że istnieje 4^n ciągów $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$ złożonych z zer i jedynek takich, że $a_1 + a_2 + \ldots + a_n < a_{n+1} + \ldots + a_{2n+1}$.

2. Punkty C i D leżą na okręgu ośrednicy AB. Proste AC i BD przecinają się w punkcie P. Proste AD i BC przecinają się w punkcie Q. Udowodnić, że $AB \perp PQ$.

3. Udowodnić, że dla n liczb naturalnych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, w których zapisie nie ma cyfry 9 zachodzi nierówność
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} < 80.$$

4. Niech $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots$ będą kolejnymi liczbami pierwszymi. Wykazać, że dla dowolnej liczby rzeczywistej M istnieje taka liczba naturalna n, że
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k} > M.$$

5. Dla nieparzystej liczby całkowitej $n > 1$ niech S będzie zbiorem wszystkich takich liczb $1 \leq k \leq n$, że k oraz $k+1$ są względnie pierwsze z n. Pokazać, że
$$\prod_{k \in S} k \equiv 1 \pmod{n}.$$

6. Okręgi o_1 i o_2 przecinają się w punktach M i Z, Okręgi o_1 i o_3 przecinają się w punktach L i Y, Okręgi o_2 i o_3 przecinają się w punktach K i X. Środek każdeg okręgu leży na zewnątrz dwóch pozostałych okręgów. Ponadto istnieje okrąg przechodzący przez punkty K, L, M oraz środki okręgów o_i. Udowodnij, że jeśli K, L, M są trzema różnymi punktami, to punkty X, Y, Z pokrywają się.