

Koło matematyczne.

zestaw 5/2015/2016

1. Przekątne czworokąta wypukłego $ABCD$ przecinają się w punkcie P . Trójkąty ABD , ACD i APD mają odpowiednio pola 10, 9 i 6. Obliczyć pole czworokąta $ABCD$.
2. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n liczba

$$n^{n^4} - n^{n^2}$$

jest podzielna przez 547

3. Na przyjęciu spotkało się $n \geq 2$ osób, przy czym każda z nich ma wśród pozostałych co najwyżej trzy nieznanymi osoby. Wykaż, że uczestników przyjęcia można podzielić na dwie grupy tak, aby każdy z nich miał w obrębie swojej grupy co najwyżej jedną nieznaną osobę.
4. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Proste AI i BI przecinają okrąg opisany na trójkącie ABC odpowiednio w punktach P i Q , różnych od A i B . Punkt F jest takim punktem, że czworokąt $CPFQ$ jest równoległobokiem. Udowodnij, że proste IC i IF są prostopadłe.
5. Rozwiąż w liczbach rzeczywistych a, b, c, d, e układ równań

$$a = c^2 + d^2, \quad b = d^2 + e^2, \quad c = e^2 + a^2, \quad d = a^2 + b^2, \quad e = b^2 + c^2$$

6. Ile jest par przekątnych rozłącznych w n -kącie foremnym? (Przekątne rozłączne to przekątne nieprzecinające się wewnątrz wielokąta i niemające wspólnego końca).