Koło matematyczne.

zestaw 5/2015

1. Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zachodzi nierówność

$$M \cdot (a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + na_n) \geq \frac{1}{2} \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2,$$

gdzie M jest największą z tych liczb.

2. Obliczyć sumę

$$\sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \ldots + \sqrt{1 + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2}}.$$

3. Dany jest trójkąt ABC o kątach ostrych przy wierzchołkach A i B. Rozpatrzmy prostokąty, których dwa wierzchołki leżą na boku AB a pozostałe dwa na bokach AC i BC. Wyznacz zbiór punktów przecięcia przekątnych wszystkich takich prostokątów.

4. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n, istnieje n kolejnych dodatnich liczb całkowitych, z których żadna nie jest całkowitą potęgą liczby pierwszej.

5. Udowodnij nierówność dla liczb nieujemnych

$$\frac{2}{x+1} + \frac{2}{y+1} + \frac{2}{z+1} > \frac{1}{xy+1} + \frac{1}{yz+1} + \frac{1}{zx+1}.$$

6. Rozstrzygnij, czy zbiór wszystkich liczb wymiernych większych od 1 można przedstawić jako sumę dwóch zbiorów rozłącznych A i B, co najmniej dwuelementowych tak, aby zachodziły jednocześnie warunki:

   (a) suma dowolnych dwóch różnych liczb ze zbioru A była elementem zbioru A

   (b) suma dowolnych dwóch różnych liczb ze zbioru B była elementem zbioru B?