Koło matematyczne.

zestaw 4/2015/2016

1. Wyznacz wszystkie liczby naturalne $n \geq 2$, dla których prawdziwe jest twierdzenie: *Liczba naturalna k dzieli się przez n wtedy i tylko wtedy, gdy suma cyfr jej zapisu dziesiętnego dzieli się przez n.*

2. Niech $\sigma(n)$ oznacza sumę wszystkich naturalnych dzielników liczby n. Liczby naturalne m i n nazywamy zaprzyjaźnionymi, gdy $\sigma(n) - n = m$ i $\sigma(m) - m = n$. Udowodnić, że jeśli czby m i n są zaprzyjaźnione to

$$\left(\sum_{d|m, d>0} \frac{1}{d}\right) \cdot \left(\sum_{d|n, d>0} \frac{1}{d}\right) \geq 4.$$

3. Na okręgu napisano, w dowolnej kolejności, liczby $1, 2, \ldots, 100$. Dla każdej trójki sąsiednich liczb obliczono sumę tych liczb. Wykaż, że różnica pewnych dwóch uzyskanych sum nie przekracza 2.

4. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC = BC$. Punkt D jest środkiem boku AB, a punkt E jest rzutem prostokątnym punktu D na prostą BC. Punkt M jest środkiem odcinka DE. Udowodnij, że proste AE i CM są prostopadłe.

5. Wykaż, że dla dowolonej liczby całkowitej $n > 1$ istnieją takie różne liczby naturalne a, b, c należące do przedziału $(n^2; (n+1)^2)$, że liczba $a^2 + b^2$ jest podzielna przez c.

6. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Udowodnij, że jeśli wykładnik przy potędze 2 w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby $n!$ wynosi $n-1$ to n jest potęgą dwójki.