Koło matematyczne.
zestaw 2/2015

1. Dana jest liczba naturalna $n \geq 2$. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ będą liczbami rzeczywistymi. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:

   a) Dla dowolnych liczb rzeczywitych $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ zachodzi nierówność
   $$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq \sum_{i=1}^{n} b_i x_i,$$

   b) Dla każdej liczby naturalnej $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ zachodzi nierówność
   $$\sum_{i=1}^{k} a_i \geq \sum_{i=1}^{k} b_i, \quad \text{a ponadto} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

2. Liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \ldots, x_n$ spełniają warunek $x_1+x_2+\ldots+x_n = 0$. Udowodnić nierówność $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2 \leq -nmM$, gdzie m jest najmniejszą, zaś M największą z tych liczb.

3. Udowodnij nierówność
   $$\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{3q^2},$$
   gdzie p i q są liczbami całkowitymi.

4. Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite n, dla których istnieją takie pełne układy reszt $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ oraz $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ modulo n, że $\{a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots a_n + b_n\}$ też jest pełnym układem reszt. (pełny układ modulo n oznacza, że każda liczba daje inną resztę z dzielenia przez n).

5. Liczby dodatnie a, b spełniają warunek $2a + 3b = 12$. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność
   $$\left(\frac{a}{3}\right)^n + \left(\frac{b}{2}\right)^n \geq 2.$$

6. W trójkącie ABC dwusieczna kąta ACB przecina bok AB w punkcie D. Okręgi opisane na trójkątach BCD i ACD przecinają boki AC i BC odpowiednio w punktach E i F. Wykaż, że $AE = BF$.