Koło matematyczne.

zestaw 1/2015

1. Rozwiązać w liczbach całkowitych równanie $x^2 + x + 41 = y^2$.

2. Wielomian $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + 1$ o współczynnikach nieujemnych ma n pierwiastków rzeczywistych.
   Udowodnić, że $P(2) \geq 3^n$.

3. Niech $n \geq a_1 > a_2 > \ldots > a_k$ będą takimi dodatnimi liczbami całkowitymi, że $NWW(a_i, a_j) \leq n$ dla dowolnych i, j. Udowodnij, że $ia_i \leq n$ dla $1 = 1, 2, 3, \ldots, k$.

4. Rozstrzygnij, czy któraś z pierwszych $10^8 + 1$ liczb Fibonacciego kończy się czterema zerami.

5. Dwusieczna kąta BAC trójkąta ABC przecina bok BC w punkcie D. Prosta przechodząca przez punkt D i prostopadła do dwusiecznej kąta ACB przecina dwusieczną kąta ABC w punkcie K. Udowodnij, że $AK = DK$.

6. Trójkąt równoboczny został podzielony prostymi równoległymi do jego boków na 36 trójkątów przystających. Linie podziału wraz z bokami dużego trojkąta tworzą siatkę, po której poruszają się żuki. W chwili początkowej w każdym węźle siatki znajduje się jeden żuk. W jednostce czasu każdy żuk przemieszcza się z węzła siatki na węzeł sąsiedni, po czym zakręca w lewo lub w prawo o 60° lub 120°. Czy z tych warunków wynika, że w pewnym momencie dwa żuki spotkają się w jednym punkcie?