

Koło matematyczne.

zestaw 17/2015/2016

1. Która liczba jest większa: $\sqrt[3]{60}$, czy $2 + \sqrt[3]{7}$?

2. Udowodnić, że jeśli liczby a, b, c są dodatnie, to

$$(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2) \geq 9a^2b^2c^2.$$

3. Dla dowolnego punktu P leżącego wewnątrz trójkąta ABC oznaczmy przez x, y, z odpowiednio odległości punktu P od prostych BC, AC i AB . Dla jakiego punktu P iloczyn xyz jest największy?

4. Wyznaczyć wszystkie ciągi p_1, p_2, \dots, p_{100} liczb pierwszych, dla których spełnione są podzielności

$$p_1 | p_2^2 - 1, \quad p_2 | p_3^2 - 1, \quad \dots, \quad p_{100} | p_1^2 - 1.$$

5. W czworokącie wypukłym $ABCD$ spełnione są równości

$$\angle BAC = 44^\circ, \quad \angle BCA = 17^\circ, \quad \angle CAD = \angle ACD = 29^\circ.$$

Wyznacz miarę kąta ABD .

6. Danych jest $n \geq 3$ punktów na płaszczyźnie, nieleżących na jednej prostej. Każdemu z tych punktów przyporządkowano pewną liczbę rzeczywistą. Wiadomo, że dla każdej prostej przechodzącej przez co najmniej dwa dane punkty suma liczb przyporządkowanych punktom leżącym na tej prostej wynosi 0. Wykazać, że każdemu punktowi przyporządkowano liczbę 0.