Koło matematyczne.

zestaw 15/2015/2016

1. Obliczyć pole wypukłego ośmiokąta wpisanego w okrąg, mającego cztery kolejne boki długości 3 i pozostałe boki długości 2.

2. Liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ są dodatnie i spełniają warunek

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Udowodnić, że

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{a_k + b_k} \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

3. Definiujemy ciąg $a_0, a_1, a_2, \ldots$ liczb całkowitych nieujemnych rekurencyjnie:

$$a_0 = 0, \quad a_{2n} = 3a_n, \quad a_{2n+1} = 3a_n + 1, \quad \text{dla} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(a) Scharakteryzować wszystkie nieujemne liczby całkowite n, dla których istnieje dokładnie jedna para (k, l) spełniająca

$$k > l \quad \text{oraz} \quad a_k + a_l = n. \tag{1}$$

(b) Dla każdego n, niech $f(n)$ będzie liczbą par spełniających (1). Znaleźć $\max f(n)$ dla $n < 3^{2005}$.

4. Na płaszczyźnie znajdują się koła o rozłącznych wnętrzach, przy czym każde koło jest styczne do co najmniej sześciu spośród pozostałych kół. Udowodnij, że tych kół jest nieskończenie wiele.

5. Dana jest liczba nieparzysta $a > 3$. Wykaż, że liczba $a^{2^n} - 1$ ma co najmniej $n + 1$ różnych dzielników pierwszych.

6. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Proste AI oraz BI przecinają boki trójkąta w punktach D i E. Jakie warunki spełniają kąty tego trójkąta jeśli $DI = EI$?