Koło matematyczne.

zestaw 13/2015/2016

1. Dany jest trójkąt równoramienny ABC ($AC = BC$). Niech o będzie okręgiem o środku w punkcie C i promieniu $r \in (0, AC)$. Styczne do okręgu o przechodzące odpowiednio przez punkty A i B przecinają się w punkcie X. Wyznaczyć miejsce geometryczne punktów X przy ustalonym trójkącie ABC i zmieniającym się promieniu r.

2. Udowodnić, że jeśli a, b i c są długościami boków trójkąta, to

$$3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2 \leq 4(ab + bc + ca).$$

3. Każdemu wierzchołkowi 100-kąta foremnego przyporządkowujemy pewną liczbę rzeczywistą, przy czym suma wszystkich przyporządkowanych liczb powinna być różna od zera. Czy można to uczynić w taki sposób, aby dodatkowo każda liczba była równa wartości bezwzględnej różnicy liczb, które z nią sąsiadują?

4. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ spełnione są zależności

$$\measuredangle C = \measuredangle E = 90^\circ \quad \text{oraz} \quad AE + BC = AB = CD = DE = 1.$$

Oblicz pole tego pięciokąta.

5. W każde pole tablicy o wymiarach 25×25 wpisano liczbę 1 lub -1. Następnie dla każdego wiersza i każdej kolumny obliczono iloczyn wszystkich liczb stojących w danym wierszu lub danej kolumnie. Wykaż, że suma 50 uzyskanych iloczynów jest różna od 0.

6. Rozstrzygnij czy równanie

$$x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}} = z^{\frac{3}{2}}$$

ma rozwiązania w liczbach całkowitych dodatnich.