Koło matematyczne.

zestaw 12/2015

1. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$, kąty przy wierzchołkach B i E są proste oraz $\measuredangle BAC = \measuredangle EAD$. Przekątne BD i CE przecinają się w punkcie O. Dowieść, że proste AO i BE są prostopadłe.

2. Danych jest 20 liczb naturalnych $a_1 < a_2 < \ldots < a_{20}$ nie przekraczających 70. Dowieść, że wśród liczb $a_j - a_k$ gdzie $j > k$ są przynajmniej cztery równe.

3. Dany jest trójkąt ABC. Na bokach BC, CA, AB znajdują się odpowiednio punkty D, E, F, przy czym
$$CD = 2BD, \quad BF = 2AF \quad \text{oraz} \quad \measuredangle DFE = 90^\circ.$$
Udowodnij, że $\measuredangle AEF = \measuredangle FED$.

4. Niech $A_1, A_2, \ldots, A_n$ będą podzbiorami zbioru $S = \{1, 2, \ldots, 200\}$. Wiadomo, że dla dowolnych dwóch liczb $a, b \in S$ istnieje zbiór A_i zawierający liczby a i b, ale nie zawierający żadnej liczby z przedziału (a, b). Wykaż, że $n \geq 10000$.

5. Wyznacz wszystkie piątki liczb pierwszych a, b, c, d, p spełniające równanie
$$\left(\frac{a}{b}\right) - \left(\frac{c}{d}\right) = p.$$

6. Niech $\{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ oraz $\{b_1, b_2, \ldots b_n\}$ będą takimi pełnymi układami reszt modulo n, że $\{a_1b_1, a_2b_2, \ldots a_nb_n\}$ także jest pełnym układem reszt. Udowodnij, że $n = 1$ lub $n = 2$.