Koło matematyczne.
zestaw 11/2015

1. Dany jest ostrosłup $ABCDS$ o podstawie czworokąta wypukłego $ABCD$. Rozstrzygnąć, czy prawdziwe jest twierdzenie: *jeśli wysokości ścian bocznych poprowadzone z wierzchołka S są równej długości, to w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg.*

2. Dowieść, że równanie $x^2 + 5 = y^3$ nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych.

3. Na zewnątrz równoległoboku $ABCD$ leży punkt P, przy czym $\measuredangle PAB = \measuredangle PCB$ oraz wierzchołki A i C leżą po różnych stronach prostej PB. Dowieść, że $\measuredangle APB = \measuredangle DPC$.

4. Zbiór X składa się z n elementów. Dla dowolnych dwóch podzbiorów A, B zbioru X obliczono liczbę elementów zbioru $A \cap B$. Dowieść, że suma otrzymanych liczb jest równa $n \cdot 4^{n-1}$.

5. Na tablicy napisano kilka rożnych liczb całkowitych dodatnich (co najmniej cztery). Okazało się, że suma każdych trzech spośród napisanych liczb jest liczbą pierwszą. Ile liczb napisano na tablicy?

6. Niech a będzie największym dodatnim rozwiązaniem równania
$$x^3 - 3x^2 + 1 = 0.$$
Udowodnij, że liczby $\lfloor a^{1788} \rfloor$ oraz $\lfloor a^{1988} \rfloor$ są podzielne przez 17.