Koło matematyczne.
1 grudnia 2014

1. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Ponadto niech S będzie $(n+1)$-elementowym podzbiorem zbioru $\{1, 2, \ldots, 2n\}$. Udowodnij, że
   (a) istnieją dwa elementy zbioru S, które są względnie pierwsze.
   (b) istnieją dwa elementy zbioru S, z których jeden dzieli drugi.
2. Spośród wierzchołków $2n$-kąta foremnego wybrano losowo trzy wierzchołki. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że trójkąt o wybranych wierzchołkach jest ostrokątny.
3. Dana jest funkcja $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniająca równanie $f(xy) = \frac{f(x)+f(y)}{x+y}$ dla wszystkich x, y rzeczywistych takich, że $x + y \neq 0$. Udowodnić, że funkcja f jest tożsamościowo równa zeru.
4. Dane są takie liczby całkowite dodatnie a, b, że liczba $a^2 + b^2 + a$ jest podzielna przez ab. Wykaż, że liczba a jest kwadratem liczby całkowitej.
5. Każda z dodatnich liczb całkowitych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jest mniejsza od 1000 ponadto $NWW(a_i, a_j) > 1000$ dla wszystkich i, j takich, że $i \neq j$.Udowodnij, że
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} < 2.$$
6. Dany jest kwadrat o wymiarach 12×12 podzielony na 144 kwadratów jednostkowych. Mówimy, że dwa kwadraty jednostkowe są przyległe gdy mają wspólny bok. Chcemy pokolorować pewną liczbę kwadratów jednostkowych w taki sposób, by każdy kwadrat jednostkowy (pokolorowany lub nie) był przyległy do co najmniej jednego kwadratu pokolorowanego. Jaką najmniejszą liczbę kwadratów jednostkowych należy pokolorować?