Koło matematyczne.

17 listopada 2014

1. Dany jest wielomian P o współczynnikach całkowitych oraz parami różne liczby całkowite a, b, c. Udowodnij, że nie jest możliwe, aby $P(a) = b$, $P(b) = c$ oraz $P(c) = a$.

2. Udodowdnij, że dla dodatnich całkowitych liczb a i b, liczba

$$\left(a + \frac{1}{2}\right)^n + \left(b + \frac{1}{2}\right)^n$$

jest całkowita dla co najwyżej skończenie wielu liczb całkowitych n.

3. Punkt O leży wewnątrz trójkąta ABC. Punkty A_1, B_1 i C_1 są rzutami punktu O na wysokości poprowadzone odpowiednio z punktów A, B i C. Udowodnić, że jeśli $AA_1 = BB_1 = CC_1$, to $AA_1 = 2r$, gdzie r jest promieniem okręgu wpisanego w trójkąta ABC.

4. Udowodnić, że jeśli wielomian f nie równy tożsamościowo zeru spełnia dla każdego rzeczywistego x równość $f(x) \cdot f(x + 3) = f(x^2 + x + 3)$, to nie ma on pierwiastków rzeczywistych.

5. W trójkącie ABC prowadzimy dwusieczne kątów BAC i ABC. Punkty P i Q są rzutami prostokątnymi wierzchołka C na te dwusieczne. Obliczyć długość odcinka PQ mając dane długości boków trójkąta.

6. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x + y + z &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 6ab \\ x^3 + y^3 + z^3 &= 3(a^3 + b^3) \end{cases}$$

gdzie a i b są liczbami rzeczywistymi.