Koło matematyczne.

zestaw 3/2016/2017

1. Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej n

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2.$$

2. Niech $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots$ będą kolejnymi liczbami pierwszymi. Wykazać, że dla dowolnej liczby rzeczywistej M istnieje taka liczba naturalna n, że

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k} > M.$$

3. Liczba naturalna $n > 1$ ma tę własność, że nie można jej przedstawić w postaci sumy co najmniej trzech kolejnych liczb całkowitych dodatnich. Wykaż, że n jest liczbą pierwszą lub potęgą dwójki.

4. Wewnątrz koła o średnicy 10 umieszczono 9 punktów. Wykaż, że odległość pewnych dwóch spośród tych punktów nie przekracza 4.

5. Dany jest kwadrat $ABCD$. Wykaż, że dla każdego punktu P spełniona jest nierówność

$$PA + PB \geq (\sqrt{2} - 1)(PC + PD)$$

oraz wyznacz zbiór wszystkich punktów P, dla których w powyższej nierówność zachodzi równość.

6. Okrąg przechodzący przez wierzchołki A, B kwadratu $ABCD$ przecina odcinki BC i BD odpowiednio w punktach P i Q (różnych od B, C, C). Okrąg przechodzący przez punkty C, P, Q przecina odcinek BD w punktach Q i R. Wykaż, że punkty P, R, A są współliniowe.