Koło matematyczne.
zestaw 2/2016/2017

1. Liczba $d_1 d_2 \ldots d_9$ składa się z dziewięciu (nie koniecznie różnych) cyfr. Liczba $e_1 e_2 \ldots e_9$ powstaje z liczby $d_1 d_2 \ldots d_9$ w następujący sposób. Dla każdego $1 \leq i \leq 9$ dobieramy e_i tak, aby liczba $d_1 \ldots d_{i-1} e_i d_{i+1} \ldots d_9$ była podzielna przez 7. Liczba $f_1 f_2 \ldots f_9$ powstaje z liczby $e_1 e_2 \ldots e_9$ w analogiczny sposób. Pokazać, że dla każdego i, różnica $d_i - f_i$ jest podzielna przez 7.

2. Wykazać, że dla dowolnej liczby rzeczywistej M istnieje taka liczba naturalna n, że
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > M.$$

3. Udowodnić, że dla n liczb naturalnych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, w których zapisie nie ma cyfry 9 zachodzi nierówność
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} < 80.$$

4. Rozstrzygnij, czy istnieje taka liczba całkowita dodatnia n, dla której liczba $7^n - 1$ jest podzielna przez $6^n - 1$.

5. Na przyjęciu spotkało się n osób. Okazało się, że żadnych dwóch znajomych nie ma wspólnego znajomego. Ponadto każdych dwóch nieznajomych posiada dokładnie dwóch wspólnych znajomych. Wykaż, że wszystkie osoby obecne na przyjęciu mają taką samą liczbę znajomych.

6. Dane są prosta k oraz punkty A i B leżące po tej samej stronie prostej k. Na prostej k wyznacz taki punkt X, dla którego wartość wyrażenia $AX^2 + BX^2$ jest najmniejsza.