Koło matematyczne.
zestaw 19/2016/2017

1. Udowodnij, że równanie
$$x^3 + 3 = 4y(y + 1)$$
nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych.

2. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC w którym $\measuredangle ACB = 45°$. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego, a punkt H ortocentrum trójkąta ABC. Prosta przechodząca przez O i prostopadła do OC przecina proste AC i BC odpowiednio w punktach K i L. Udowodnij, że obwód trójkąta KLH jest równy średnicy okręgu opisanego na trójkącie ABC.

3. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej $n > 1$ istnieje taki zbiór S_n składający się z n różnych liczb całkowitych dodatnich, że dla każdych dwóch różnych liczb $a, b \in S_n$ liczba ab jest podzielna przez $(a - b)^2$.

4. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Punkty D, E, F leżą odpowiednio a bokach BC, CA, AB, przy czym $\measuredangle FDE = \measuredangle BAC$, oraz $\measuredangle DEF = \measuredangle ABC$. Udowodnij, że punkt przecięcia wysokości trójkąta DEF pokrywa się ze środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC.

5. Liczba całkowita $n > 1$ ma tę własność, że liczba $2^n + n^2$ jest liczbą pierwszą. Wykaż, że liczba n jest nieparzystą wielokrotnością liczby 3.

6. Dla liczb dodatnich a, b, c przyjmijmy
$$U = a^2b + b^2c + c^2a, \quad V = ab^2 + bc^2 + ca^2,$$
$$A = a^3 + abc, \quad B = b^3 + abc, \quad C = c^3 + abc.$$
Udowodnij, że
$$\sqrt{UV} \geq abc + \sqrt{ABC}.$$