Koło matematyczne.
zestaw 18/2016/2017

1. Niech a, b, c, d oraz n będą liczbami całkowitymi dodatnimi spełniającymi zależność
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 7 \cdot 4^n.$$
Wykaż, że każda z liczb a, b, c, d jest większa lub równa 2^{n-1}.

2. Liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \ldots, a_n$, gdzie $n \geq 4$, spełniają nierówności
$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq n \quad \text{oraz} \quad a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geq n^2.$$
Udowodnij, że co najmniej jedna z liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jest większa lub równa 2.

3. Na bokach AB, BC, CA trójkąta ABC zbudowano - na zewnątrz trójkąta ABC - kwadraty $ABRS$, $BCPQ$ oraz $ACMN$. Udowodnij, że pola trójkątów NAS, BRQ oraz MPC są równe.

4. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Punkty M, N, J są odpowiednio środkami okręgów wpisanych w trójkąty AEF, BDF, DEF. Udowodnij, że punkty F i J są symetryczne względem prostej MN.

5. Dana jest dodatnia liczba całkowita n. Udowodnij, że jeżli liczba
$$2 + 2\sqrt{28n^2 + 1}$$
jest naturalna, to jest kwadratem.

6. Rozważamy wielomian
$$P(x) = (1 + x^{43} + x^{44} + x^{45})^{44} = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{1980} x^{1980}.$$
Oblicz sumę $a_0 + a_3 + a_6 + \ldots + a_{1980}$ tych współczynników, których numery dzielą się przez 3.