ROZWIĄZANIA ZADAŃ Z FINAŁU KONKURSU INFORMATYCZNEGO P@SCAL 2010

ZADANIE 1.

Dana są następujące tablice:

I		II		III		IV	
1	9	2	10	4	12	8	12
3	11	3	11	5	13	9	13
5	13	6	14	6	14	10	14
7	15	7	15	7	15	11	15

Magik nie posługuje się czarami. Każdej liczbie przyporządkowana jest kombinacja rozumiana jako numery tablic, na których się znajduje. Zapisując liczby od 1 do 15 zauważamy, że każdej przyporządkowany jest inny kod:

1: I
2: brak
3: I, II
4: III
5: I, III
6: II, III
7: I, II, III
8: IV
9: I, IV
10: II, IV
11: I, II, IV
12: III, IV
13: I, III, IV
14: II, III, IV
15: I, II, III, IV

ZADANIE 2.

Oznaczmy przez x zawartość pełnej szkatułki; szkatułce półpełnej przyporządkujemy zatem $\frac{x}{2}$, zaś pustej 0. Całkowita zawartość jaką posiadamy wynosi:

$$X = 5 \cdot x + 11 \cdot \frac{x}{2} + 8 \cdot 0 = \frac{21}{2}x$$

Każdej z córek musimy podarować tyle samo monet, zatem:

$$a_1 = a_2 = a_3 = a$$

$$a = X \cdot \frac{1}{3} = \frac{21}{2}x \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{2}x = 3{,}5x$$

Mamy także drugi warunek; musimy każdej podarować taką samą ilość szkatułek, czyli $\frac{24}{3} = 8$.
Ostatecznie widzimy, że nie możemy ofiarować żadnej więcej niż 3 szkatułek pełnych i 8 półpełnych.
Dalsze rozważania nie są już trudne. Jednym z rozwiązań jest następujący układ:

	PIERWSZA CÓRKA	DRUGA CÓRKA	TRZECIA CÓRKA
pełne	**2**	**2**	**1**
półpełne	**3**	**3**	**5**
puste	**3**	**3**	**2**

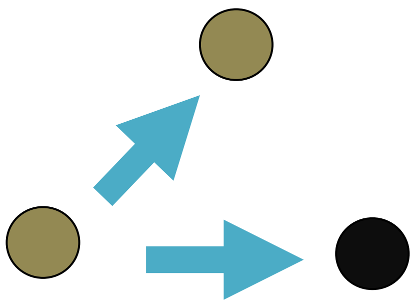
Nie jest to oczywiście jedyne rozwiązane. Inne poprawne to:

	PIERWSZA CÓRKA	DRUGA CÓRKA	TRZECIA CÓRKA
pełne	**0**	**3**	**2**
półpełne	**7**	**1**	**3**
puste	**1**	**4**	**3**

	PIERWSZA CÓRKA	DRUGA CÓRKA	TRZECIA CÓRKA
pełne	**1**	**3**	**1**
półpełne	**5**	**1**	**5**
puste	**2**	**4**	**2**

ZADANIE 3.

W związku z tym, iż po zapaleniu światła wszyscy trzej detektywi podnieśli ręce, co najmniej dwóch ma na głowach brązowe kapelusze, gdyby tak nie było – albo nikt nie podniósł by ręki (w sytuacji, gdy tylko czarne kapelusze zostały użyte) lub nie podniósł by ręki posiadacz jedynego brązowego kapelusza. Kolejną rzeczą, jaką należy zauważyć, jest fakt, że jeden z detektywów miał pewność co do koloru swojego kapelusza; nie miałby jej, gdyby wszyscy troje mieli brązowe kapelusze. Zauważył zatem jeden kapelusz brązowy i jeden czarny, a z uwagi na wcześniejsze rozważania – tylko jeden czarny kapelusz może być wykorzystany – oczywistym staje się, że detektyw, który zgadnął miał na głowie BRĄZOWY KAPELUSZ.



Nie wszyscy detektywi mieli jednakowe szanse. Ten z czarnym kapeluszem na głowie – widząc dwa brązowe – mógł jedynie strzelać, miał 50% szans na zgadnięcie. Detektywi z brązowymi kapeluszami, po namyśle, mieli 100% szans.

ZADANIE 4.

Weźmy najgorszy przypadek – czyli taki, kiedy żadna skrzynia nie stoi na swoim miejscu, a w każdym ruchu przestawiamy tylko jedną. Takim ustawieniem jest np. to przedstawione na rysunku poniżej:

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Załóżmy, że robotnik zaczyna od lewej strony (nie ma to znaczenia). Zamieniając kolejne skrzynie będzie przenosić „10" coraz dalej, pozostałe skrzynie cofną się o jedno pole w lewo. Zostanie wykonanych 9 ruchów. Następnie tak samo będzie z „9", aby przenieść ją koniecznych będzie już tylko 8 zamian. Postępując analogicznie dochodzimy do wniosku, że (z – liczba przestawień):

$$z_{max} = 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$$

Choć o to w zadaniu nie pytają, oczywistym jest, że najmniejsza liczba zamian wynosi $z_{min} = 0$.

Z powyższego przykładu łatwo dochodzimy do wyniku ilości porównań. Jeżeli przyjmiemy, że robotnik nie porównywał skrzyń już poprawnie ustawionych, sprawdzeń będzie tyle samo, co liczby przestawień. Oznaczmy przez n liczbę porównań:

$$n_{max} = z_{max} = 45$$

Poprawnym tokiem myślenia było także założenie, że robotnik w każdym kursie sprawdza ze sobą wszystkie kolejne skrzynie, a więc wykonuje 9 porównań. W najmniej korzystnym wariancie kursów musiałby zrobić 10 – 9 na przestawienie wszystkich skrzyń oraz 1 na ostateczne zweryfikowanie:

$$n_{max} = 9 \cdot (9 + 1) = 90$$

W najlepszym przypadku skrzynie byłyby już uporządkowane, zatem robotnik potrzebowałby jednego kursu na potwierdzenie tego faktu:

$$n_{min} = 9 \cdot (0 + 1) = 9$$

Usprawnić czynności sortowania skrzyń przez robotnika niestety NIE MOŻNA.

ZADANIE 5.

Zauważmy, że do komórek możemy wpisywać jedynie 0 lub 1. Mając do wypełnienia 14 pól (a tyle znajduje się w jednej kolumnie, w jednym rzędzie znajduje się ich 8) możemy uzyskać maksymalną sumę równą 14. Gdy zamiast jednej jedynki wprowadzimy 0, uzyskamy 13. Postępując analogicznie stwierdzamy, że owa suma należy do zbioru:

$$S \in < 0, 14 >$$

Zatem możemy uzyskać 15 RÓŻNYCH SUM. Oczywiście niektóre sumy muszą się powtórzyć, ponieważ mamy ich aż $14 + 8 = 22$. Tabela przedstawia przykładowe rozwiązanie:

0	0	0	0	0	0	0	0	**0**
1	0	0	0	0	0	0	0	**1**
1	1	0	0	0	0	0	0	**2**
1	1	1	0	0	0	0	0	**3**
1	1	1	1	0	0	0	0	**4**
1	1	1	1	1	0	0	0	**5**
1	1	1	1	1	1	0	0	**6**
1	1	1	1	1	1	1	0	**7**
1	1	1	1	1	1	1	1	**8**
1	1	1	1	1	1	1	1	**8**
1	1	1	1	1	1	1	1	**8**
1	1	1	1	1	1	1	1	**8**
1	1	1	1	1	1	1	1	**8**
1	1	1	1	1	1	1	1	**8**
13	**12**	**11**	**10**	**9**	**8**	**7**	**6**	

ZADANIE 6.

Mamy do czynienia z ruchem jednostajnym prostoliniowym, zatem położenie autobusu możemy określić za pomocą wzoru (x jest to aktualne położenie, x_0 – położenie początkowe):

$$x = x_0 + v \cdot t$$

Oznaczmy przez x_1, x_2 i x_3 wartości na kolejnych słupkach na drodze. Okres czasu, po którym sprawdzamy odległość jest ten sam w obu przypadkach, oznaczmy go po prostu przez t.

$$x_3 = x_2 + v \cdot t$$

$$x_2 = x_1 + v \cdot t$$

Odejmijmy od siebie dwa powyższe równania stronami:

$$x_3 - x_2 = x_2 - x_1$$

Wróćmy do meritum zadania. Na pierwszym słupku widniała liczba dwucyfrowa, na drugim również dwucyfrowa o odwróconych względem pierwszej cyfrach. Na trzecim – trzycyfrowa o cyfrach takich, jak na pierwszym słupku z zerem pomiędzy nimi. Możemy je zapisać w nast. sposób:

$$x_1 = 10 \cdot a + b$$

$$x_2 = 10 \cdot b + a$$

$$x_3 = 100 \cdot a + b$$

Oczywiście a i b to cyfry z wykluczeniem zera. Podstawiając do poprzedniego równania otrzymujemy:

$$100a + b - 10b - a = 10b + a - 10a - b$$

$$108a - 18b = 0$$

$$b = 6a$$

Jedyną parą liczb, jaka spełniającą powyższe równanie (przypomnę, że a i b to cyfry!) jest:

$$a = 1; b = 6$$

Zatem na pierwszym słupku widniała liczba 16, na drugim 61, zaś na trzecim 106.